www.pmfst.hr/~pero (Nastava -> MIS)

- nastavni materijali, obavijesti, linkovi
- obrazac za primanje obavijesti putem e-maila
- kontakt: stipanovic.petar@gmail.com, pero@pmfst.hr

Vježbe

- obavezno prisustvovanje
- modeliranje i simulacije uz pomoć programa MS Excel, Vensim …

Pismeni ispit

- **kolokviji**:
  - ✓ 2 kolokvija
  - ✓ min. za prolaz: 50%
  - ✓ svi kolokviji položeni => položen pismeni ispit
- **pismeni ispit:**
  - ✓ cjelokupno gradivo
  - ✓ min. za prolaz: 50%
  - ✓ izlazak na pismeni ispit poništava prethodno stečene bodove

Usmeni ispit

- o načinu polaganja usmenog ispita bit ćete obaviješteni na predavanjima

Literatura

- Angela B. Shiflet and George W. Shiflet: „Introduction to Computational Science: Modeling and Simulation for the Sciences
  http://wofford-ecs.org/IntroComputationalScience/_dataFilePages/excelSysDyna.htm
- http://phet.colorado.edu/en/simulations/category/new

Modeliranje

Modeliranje je proces analize stvarnih problema te kreiranja matematičke reprezentacije u svrhu predviđanja ponašanja određenog sustava.

Koraci u modeliranju nekog problema:

1. Analiza problema (identifikacija problema u svrhu kreiranja matematičkog modela, klasifikacija u deterministički ili stohastički);
2. Formuliranje problema (skupljanje podataka o ponašanju sustava, ispitivanje pretpostavki koje bi pojednostavnile problem, određivanje varijabli i mjernih jedinica, odgonetavanja odnosa među varijablama i podmodelima, definiranje funkcija i jednadžbi);
3. Rješavanja problema;
4. Testiranje i potvrda točnosti;
5. Izvještaj o modelu (analiza okolnosti u kojima je riješen problem, dijagram modela, opis tehnika pri rješavanju problema, rezultati i zaključak o rješenjima koja daje model).

Simulacija

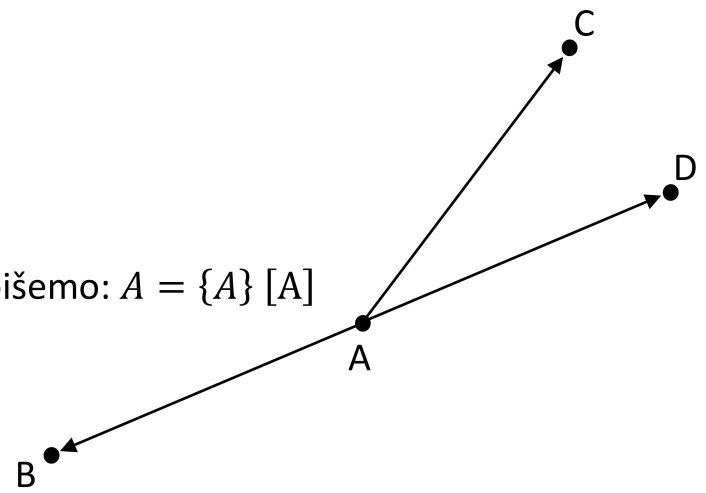
Simulacija je model nekog stvarnog sustava koji dopušta dinamičko izvršavanje i manipulaciju istog.

Simulacija gibanja

http://phet.colorado.edu/en/simulation/moving-man

Fizikalne veličine

- Prirodu opisujemo gradeći matematičke modele koje potom provjeravamo posebno smišljenim postupcima (eksperimentima) kojima se mjere fizikalne veličine.
- Mjerenja vršimo u proizvoljno odabranom referentnom sustavu, jer izbor ne mijenja fizikalne zakone.
- Fizikalne veličine su svojstva tijela, tvari, stanja ili procesa koja možemo mjeriti, a mjerimo ih uspoređivanjem fizikalne veličine sa standardom (mjernom jedinicom)
- Danas je većinom u upotrebi Međunarodni sustav jedinica (SI).
  http://physics.nist.gov/cuu/Units/current.html
- Radi jednostavnijeg zapisa iznosa uz mjerne jedinice koristimo i prefikse.
  http://physics.nist.gov/cuu/Units/prefixes.html
- Ako je A opći znak veličine, {A} brojčana vrijednost, a [A] mjerna jedinica, pišemo: $A = \{A\}\ [\mathrm{A}]$



Skalari

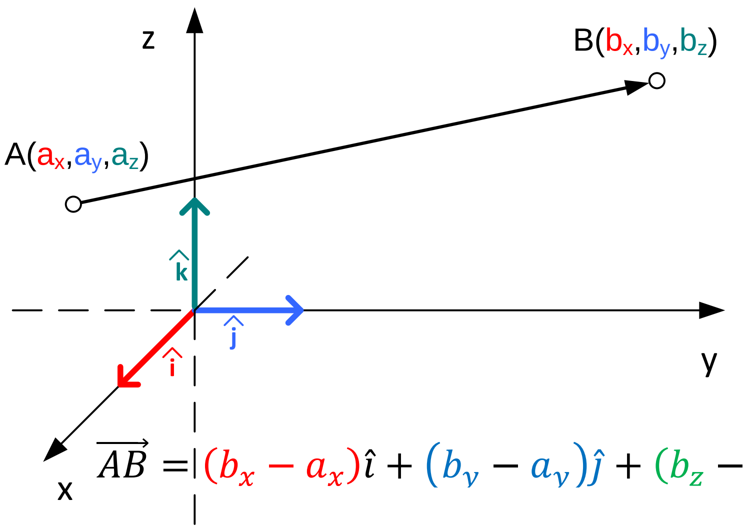
- Skalari su veličine koje su u potpunosti definirane iznosom (brojem)
- Primjeri skalarnih fizikalnih veličina: vrijeme t/s, duljina x/m, …

Vektori

- Vektori su veličine koje su u potpunosti definirane **duljinom** (modulom), **smjerom** pravca na kojem se nalazi i **orijentacijom** (jer na pravcu iz neke točke mogu biti usmjereni na različite strane)
- Razlog korištenja vektora: npr. Pomakli smo se iz točke A za **2 m**. Ne možemo odrediti gdje se nalazimo (jedni od beskonačno mogućih položaja su kao na gornjoj slici točke B, C, D udaljene za 2 m od A). Ako znamo smjer (**pravac**) po kojem smo se gibali mogli smo doći u točke B i D. A ako znamo i orijentaciju (na koju smo stranu pravca išli obzirom na točku A), znamo točan konačni položaj.
- Primjeri vektorskih fizikalnih veličina: položaj $\vec{s}/\mathrm{m}$, brzina $\vec{v}/\mathrm{ms}^{-1}$, akceleracija $\vec{a}/\mathrm{ms}^{-2}$…

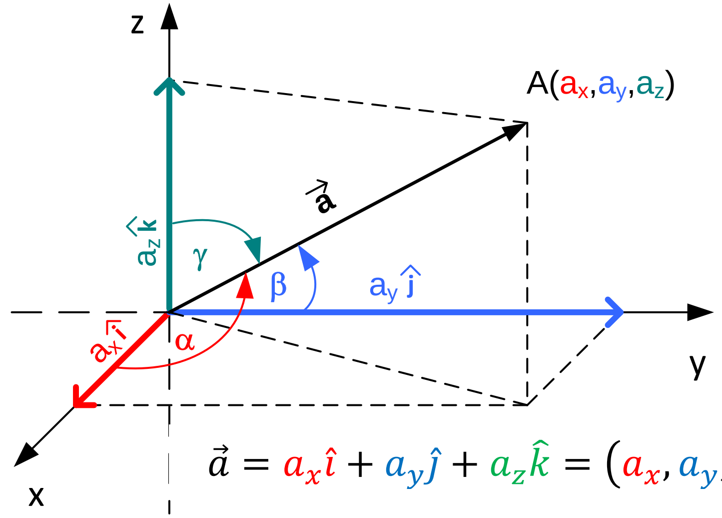
Vektori – definicija i operacije

- Vektor je element vektorskog prostora. Pod pojmom vektor, ovdje ćemo podrazumijevati samo elemente trodimenzionalanog Euklidskog prostora, odnosno usmjerene (orjentirane) dužine.
- Vektor od točke A do točke B



$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x)\hat{\imath} + (b_y - a_y)\hat{\jmath} + (b_z - a_z)\hat{k}$$

- Radijus vektor točke A rastavljen na komponente

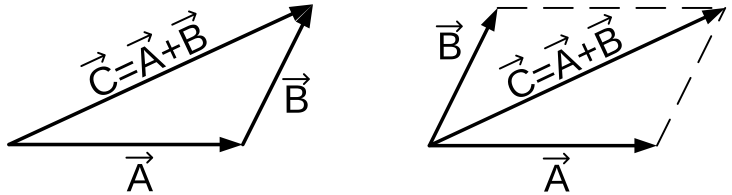


$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

- Duljina (iznos) vektora

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

- Zbrajanje vektora



- Množenje vektora skalarom (realnim brojem)

$$\alpha \cdot \vec{A} = \alpha A_x\hat{\imath} + \alpha A_y\hat{\jmath} + \alpha A_z\hat{k}$$

- Jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{A}$

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}{|\vec{A}|}$$

$$\hat{A} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath} + \cos\gamma\,\hat{k}$$

Limes

- $\lim\limits_{x_2 \to x_1}$ "izraz" označava graničnu vrijednost (limes) kojoj izraz teži kada se x_2 približava x_1 $(x_2 \to x_1)$
- Npr. niz brojeva $\left(\frac{1}{n}\right)$, odnosno: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{10000000}, \dots$ približava se broju 0 kada n raste prema beskonačno $(n \to \infty)$ što zapisujemo

$$\lim_{\mathrm{n} \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Sumiranje

- Izraze, u kojima imamo puno elemenata koji se zbrajaju (sumiraju), radi jednostavnosti, zapisujemo kraće pomoću znaka sumiranja (veliko grčko slovo sigma $\sum$) izostavljajući oznake zbrajanja.
- Elemente, koji se zbrajaju, moramo moći napisati u općenitom obliku pomoću indeksa, npr. i.
- Ispod sigme pišemo indeks po kojem se izvodi zbrajanje i njegovu početnu vrijednost, a iznad pišemo konačnu vrijednost koju poprima indeks.
- Ako nije naznačeno, pretpostavlja se kako se indeksi povećavaju za 1 od početne do konačne vrijednosti.
- Npr.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} \equiv \sum_{i=1}^{11} a_i$$

$$a_2 \mathrm{b}_3^4 \mathrm{c}^2 + a_3 \mathrm{b}_4^6 \mathrm{c}^2 + a_4 \mathrm{b}_5^8 \mathrm{c}^2 + a_5 \mathrm{b}_6^{10} \mathrm{c}^2 + a_6 \mathrm{b}_7^{12} \mathrm{c}^2 + a_7 \mathrm{b}_8^{14} \mathrm{c}^2 + a_8 \mathrm{b}_9^{16} \mathrm{c}^2 + a_9 \mathrm{b}_{10}^{18} \mathrm{c}^2 \equiv \sum_{i=2}^{9} a_i \mathrm{b}_{i+1}^{2i} \mathrm{c}^2$$

Derivacije

- Derivacija (brzina promjene funkcije) funkcije $f: \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$ u točki $x_1 \in \mathfrak{D}$ iznosi:

$$f'(x_1) = \frac{df(x_1)}{dx} := \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

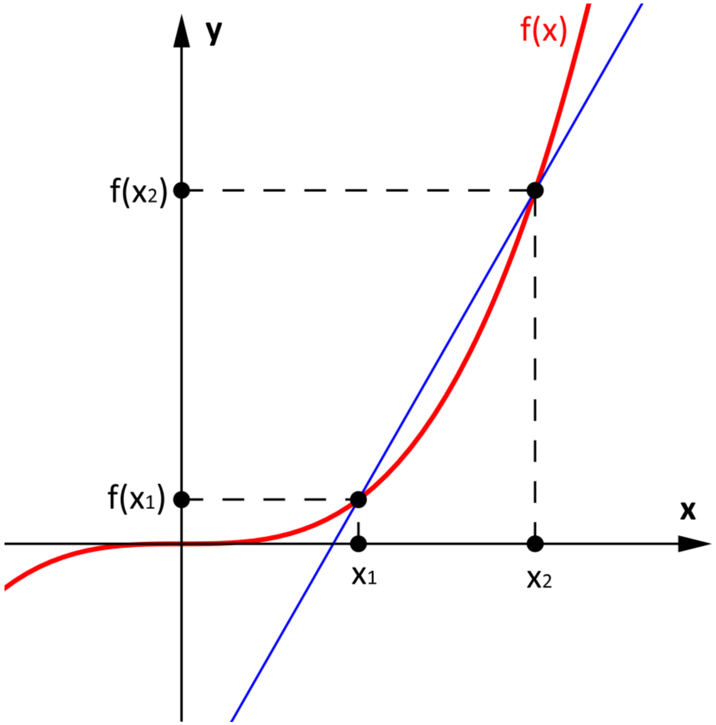
- Jednadžba **sekante**, tj. pravca koji siječe krivulju u točkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = k(x - x_1)$$

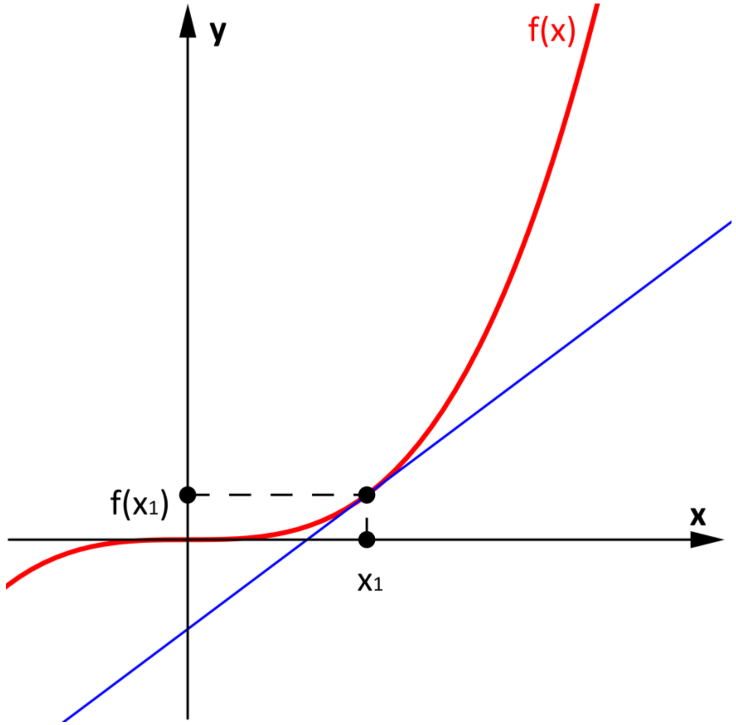
$$\boldsymbol{x_2 \to x_1}$$

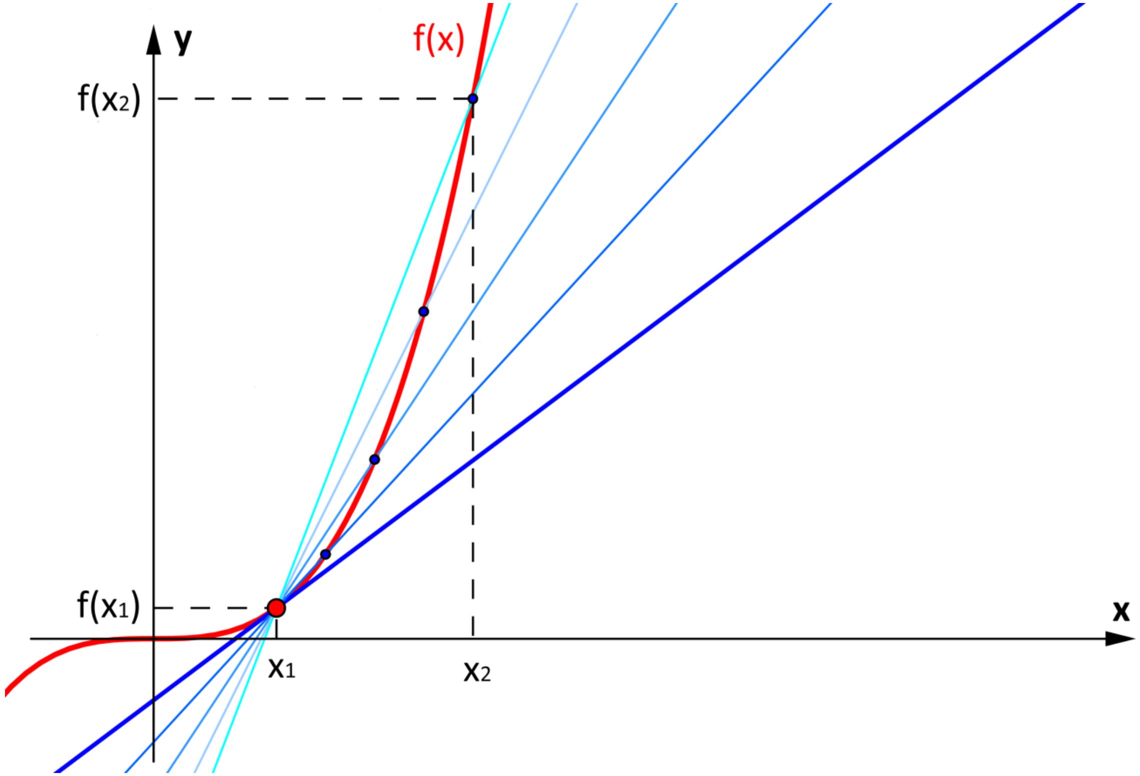
- Jednadžba **tangente**, tj. pravca koji dira krivulju u točki (x_1, y_1)

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$



$$\boxed{(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{n x^{n-1}}}$$





- Kako $\boldsymbol{x_2} \to \boldsymbol{x_1}$ tako sekanta prelazi u tangentu
- Derivacija određuje koeficijent smjera tangente $k = f'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha$, gdje je α kut koji tangenta zatvara sa x-osi
- Znači: derivacija funkcije određuje brzinu promjene funkcije (što je funkcija strmija oko neke točke to je veći iznos njene derivacije u toj točki i obrnuto)
- Ako numerički računamo derivaciju funkcije $f(x)$ u točki x_1, nagib funkcije mora biti približno jednak na cijelom intervalu $[x_1, x_2]$ pa je derivacija približno

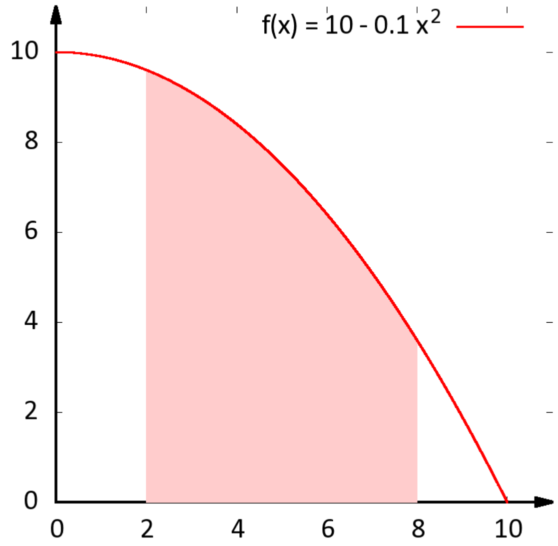
$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

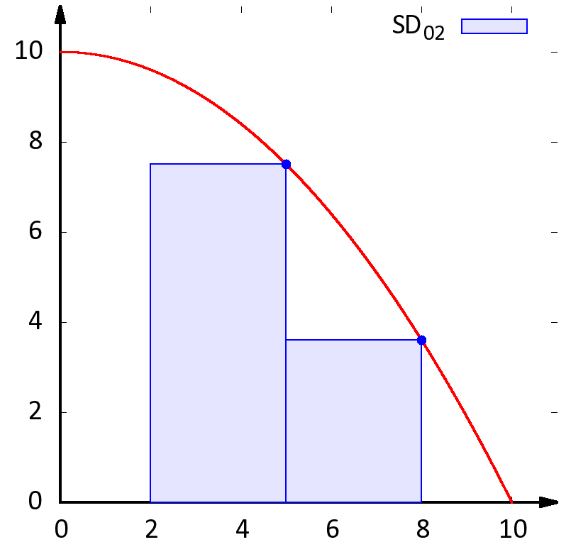
Problem određivanja površine ispod krivulje

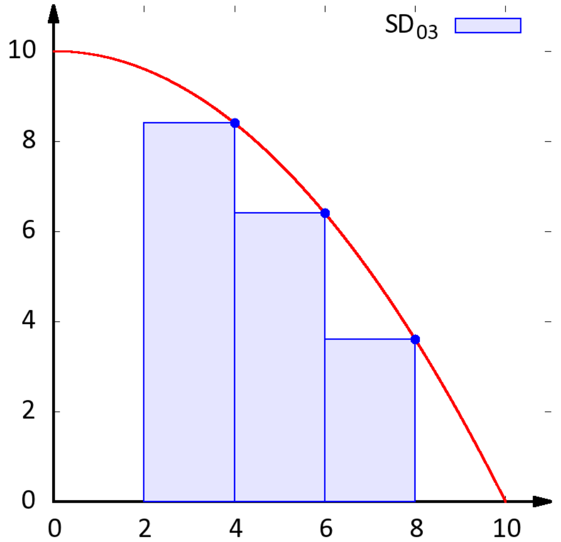
- Dio površine P ispod krivulje (crveno područje) možemo aproksimirati (približno odrediti) dijeleći je na pravokutnike
- Donja integralna suma

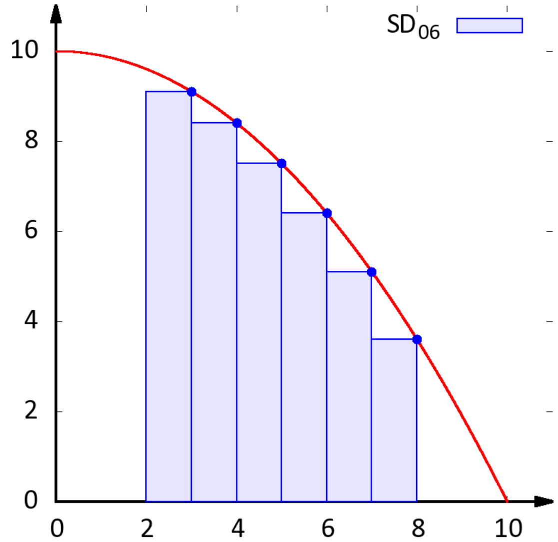
$$P \approx SD_N = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \Delta x_i$$

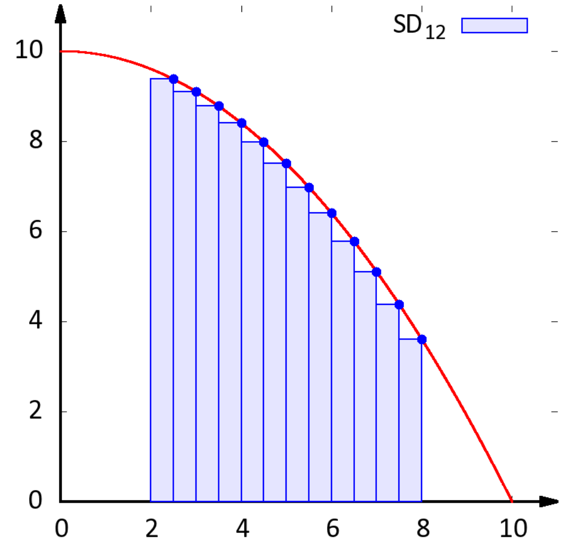
gdje je m_i najmanja vrijednost kojoj teži funkcija $f(x)$ (visina pravokutnika) na i-tom segmentu Δx_i (širina pravokutnika)







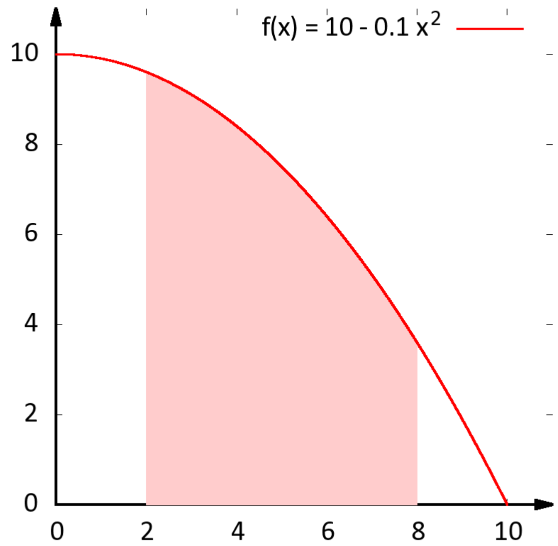


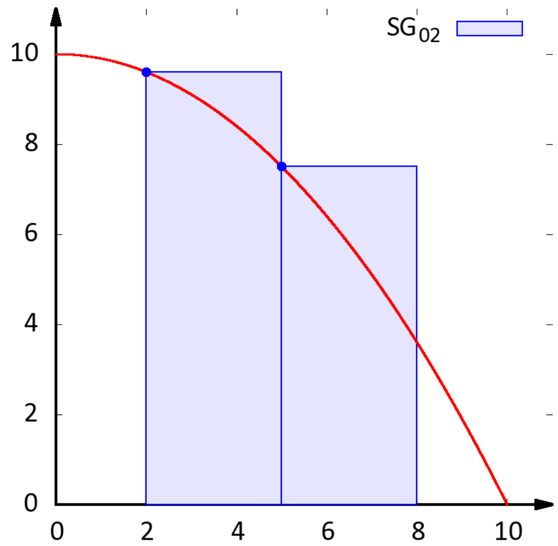


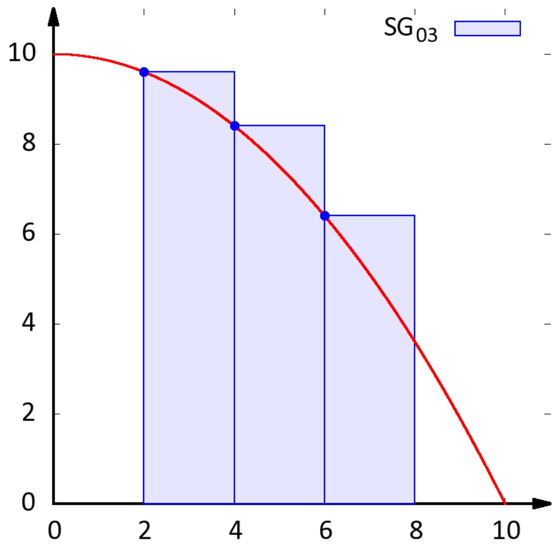
- Gornja integralna suma

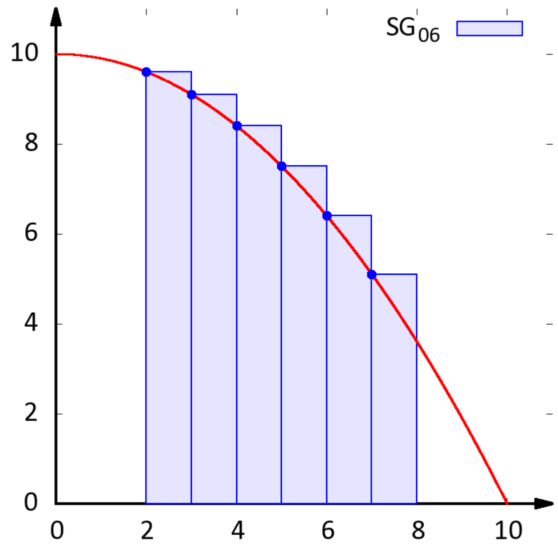
$$P \approx SG_N = \sum_{i=1}^{N} M_i \cdot \Delta x_i$$

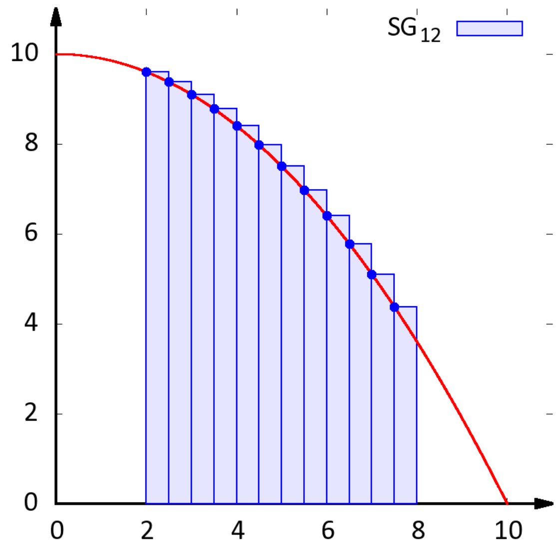
gdje je M_i najveća vrijednost kojoj teži funkcija $f(x)$ (visina pravokutnika) na i-tom segmentu Δx_i (širina pravokutnika)











- Usporedba vrijednosti

N	SD_N	SG_N	$SG_N - SD_N$
2	33.3	51.3	18
3	36.8	48.8	12
6	40.1	46.1	6
12	41.675	44.675	3
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
∞	P	P	0

$$SD_N \le P \le SG_N$$

- Integralna suma

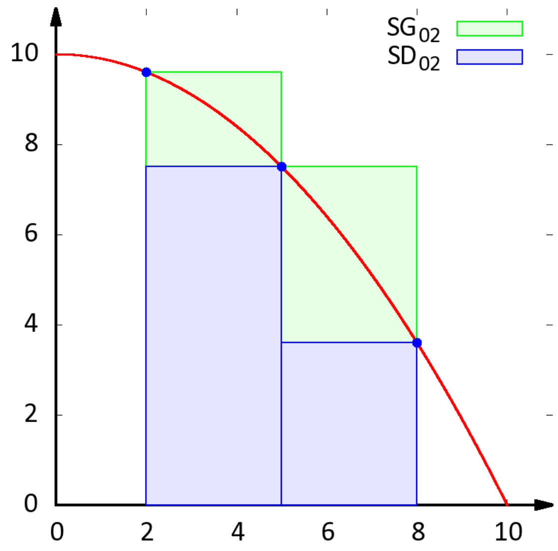
$$S = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

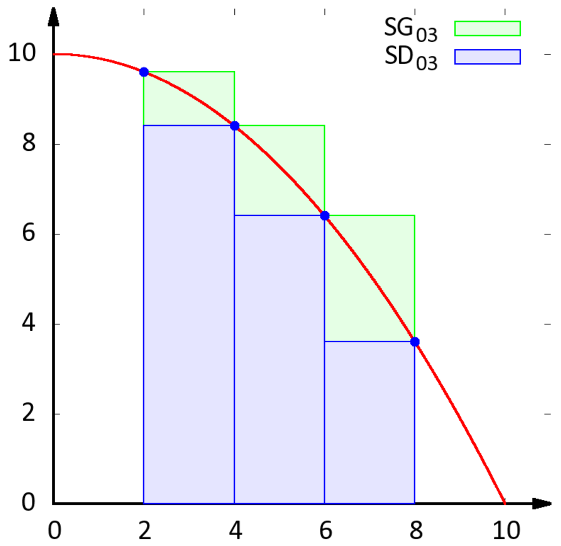
gdje je $x_i \in \Delta x_i$ pa je

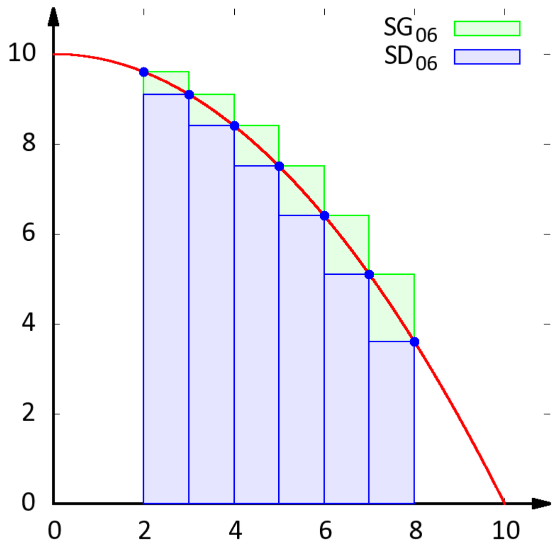
$$m_i \le f(x_i) \le M_i$$

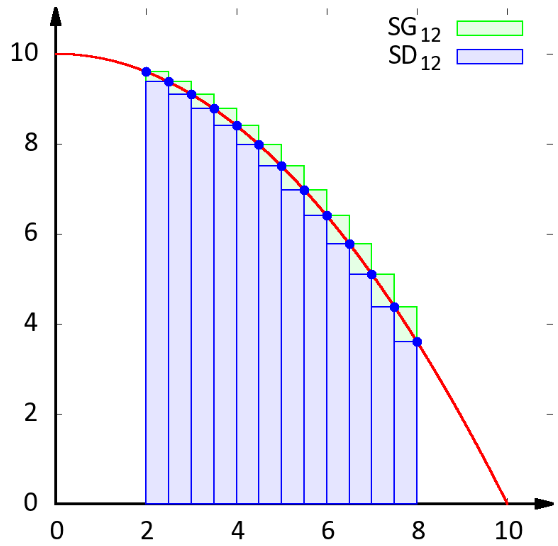
odnosno daje vrijednost između gornje i donje

$$SD_N \le S \le SG_N$$







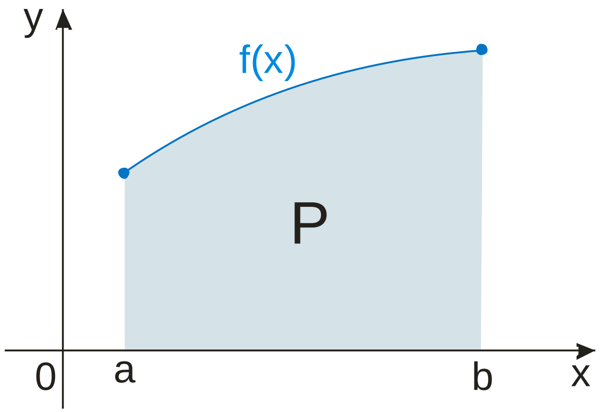


Integriranje

- Ako su jednake vrijednosti kojima gornja i donja integralna suma teže za različite podjele, onda taj broj nazivamo Riemannovim integralom funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$

$$P = \int_a^b f(x)dx$$

- Geometrijska interpretacija određenog integrala:: površina ispod grafa krivulje $f(x)$ za $x \in [a, b]$



- Inverzna operacija od diferenciranja

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$$

- Newton-Leibnitzova formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Zbrajanje i oduzimanje integrala

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

- Prava vrijednost crveno obojene površine iz prethodnih primjera

$$P = \int_2^8 (10 - 0.1 \cdot x^2)dx = \left(10x - 0.1 \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=2}^{x=8}$$

$$\mathrm{P} = \left(80 - \frac{512}{30}\right) - \left(20 - \frac{8}{30}\right) = \frac{1280}{30} \approx 42.67$$

- Osnovni neodređeni integrali

$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{\mathrm{n}+1} + C}$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \mathrm{tg}\, x \, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert\mathrm{x}\rvert + C$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\int \mathrm{ctg}\, x \, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$